线性方程组的解

林胤榜

同济大学数学科学学院

主要内容

线性方程组的解

假设有方程 (组)

$$Ax = b,$$

$A \in M_{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

它若有解, 则是相容的; 否则, 它不相容.

线性方程组的解

假设有方程 (组)

$$Ax = b,$$

$A \in M_{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.
它若有解, 则是相容的; 否则, 它不相容.

定理

对于 n 元线性方程组 $Ax = b$

- i 无解当且仅当 $R(A) < R(A, b)$;
- ii 有唯一解当且仅当 $R(A) = R(A, b) = n$;
- iii 有无穷多个解当且仅当 $R(A) = R(A, b) < n$.

我们将会由定理的证明看到求解方程的方法.

证明.
令 $R(A)=r$. 为了叙述方便, 不妨假设增广矩阵 $B=(A,b)$ 的行最简形为

$$\widetilde{B}=\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & & & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ O & & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ & & & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & O & & O \end{array}\right).$$

只需证 $(\Leftarrow)$.

- i (⇒) 由 (ii) (⇐) 和 (iii) (⇐) 可得.
- ii (⇒) 由 (i) (⇐) 和 (iii) (⇐) 可得.
- iii (⇒) 由 (i) (⇐) 和 (ii) (⇐) 可得.

下证

- i (⇐) 若 $R(A) < R(A,b)$, 则 $d_{r+1} = 1$. 但还有方程 $0 = d_{r+1}$, 矛盾.
- ii (⇐) 若 $R(A) = R(A,b) = n$, 则 $x = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ 是唯一解.
- iii (⇐) 若 $R(A) = R(A,b) < n$, 则 $d_{r+1} = 0$.

另外，

$$x=x_{r+1}\begin{pmatrix}-b_{11}\\-b_{21}\\\vdots\\-b_{r1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x_{r+2}\begin{pmatrix}-b_{12}\\-b_{22}\\\vdots\\-b_{r2}\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}-b_{1,n-r}\\-b_{2,n-r}\\\vdots\\-b_{r,n-r}\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_r\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},$$

$x_{r+1},\cdots,x_n\in\mathbb{R}$, 是方程的所有解.

通解形式

总结. 在情形 (iii) 中, 如何从增广矩阵行最简形矩阵中读出通解(所有解).
假设有证明中假设的形式. 将粉色矩阵的元素取相反数，下方添上单位阵 E_{n-r}.

$$\begin{matrix} -b_{11} & \cdots & & -b_{1,n-r} \\ -b_{21} & \cdots & & -b_{2,n-r} \\ \vdots & & & \vdots \\ -b_{r1} & \cdots & & -b_{r,n-r} \\ 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 \end{matrix}$$

则方程的所有解是

$$x=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_r\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-b_{11}\\-b_{21}\\\vdots\\-b_{r1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-b_{12}\\-b_{22}\\\vdots\\-b_{r2}\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+c_{n-r}\begin{pmatrix}-b_{1,n-r}\\-b_{2,n-r}\\\vdots\\-b_{r,n-r}\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},$$

$c_i\in\mathbb{R}$ 为任意实数. 其中, $(d_1,d_2,\cdots,d_r,0,\cdots,0)$ 是一个特解.

例子

求解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

解. 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, 常数矩阵 $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (略去, 即不写增广矩阵).

将 A 化为行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得到等价方程组

$$\begin{cases} x_1 & & -2x_3 & -\frac{5}{3}x_4 & = & 0 \\ & x_2 & +2x_3 & +\frac{4}{3}x_4 & = & 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_2 = -2x_3 - \frac{4}{3}x_4, \end{cases}$$

$x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ 可取任意实数.

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

由于首非零元聚集在左侧，这也可用前面总结的方法读出：
由

$$\begin{matrix} -2 & -\frac{5}{3} \\ 2 & \frac{4}{3} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 2 & \frac{5}{3} \\ -2 & -\frac{4}{3} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} 2 & \frac{5}{3} \\ -2 & -\frac{4}{3} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

通解为

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例子

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 2 & -1\\ 2 & 6 & 9 & 5 & 4\\ -1 & -3 & 3 & 1 & 13\\ 0 & 0 & -3 & 1 & -6\end{pmatrix},\ b_1=\begin{pmatrix}7\\14\\-7\\0\end{pmatrix},\ b_2=\begin{pmatrix}7\\14\\-7\\1\end{pmatrix}.$$

求解: (i) $Ax=b_1$; (ii) $Ax=b_2$.

解. (i) 化 (A, b_1) 为行最简形矩阵, 得

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$R(A, b_1) = R(A) = 3 < 5$, 有无穷多解.

解. (i) 化 (A, b_1) 为行最简形矩阵, 得

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$R(A, b_1) = R(A) = 3 < 5$, 有无穷多解. 等价方程组为

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 & & & -7x_5 & = & 7 \\ & x_3 & & +2x_5 & = & 0 \\ & & x_4 & & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

所以通解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_2 + 7x_5 + 7 \\ x_2 \\ -2x_5 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 x_2, x_5 为自由变量.

(ii) $R(A, b_2) = 4 > 3 = R(A)$. 无解.

例子

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$$

x 取何值时, 方程组 (i) 有唯一解; (ii) 无解; (iii) 有无穷多解. 若有无穷多解, 求通解.

例子

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$$

x 取何值时, 方程组 (i) 有唯一解; (ii) 无解; (iii) 有无穷多解.
若有无穷多解, 求通解.

解. 设 A 为系数矩阵, b 为常数矩阵. 方程组有唯一解的充分必要条件是

$$R(A) = R(A, b) = 3 \Leftrightarrow |A| \neq 0.$$

另外,

$$|A| = (1+\lambda)^3 + 1 + 1 - 1 - (1+\lambda) - (1+\lambda)^2 = \lambda^2(\lambda+2).$$

所以当 $\lambda \neq 0$ 或 -2 时方程组有唯一解.

当 $\lambda = 0$ 时, 前两条方程矛盾, 所以无解.

当 $\lambda = 0$ 时, 前两条方程矛盾, 所以无解.
当 $\lambda = -2$ 时,

$$(A,b) = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

通解为 $x = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}$. □

假设 $A \in M_{m\times n}$.

定理

$Ax = 0$ 有非零解当且仅当 $R(A) < n$.

假设 $A \in M_{m\times n}$.

定理

$Ax = 0$ 有非零解当且仅当 $R(A) < n$.

这里, $R(A)$ 可以理解成有效方程的个数. (齐次线性方程组) $Ax = 0$ 有非零解当且仅当有效方程个数严格小于未知数个数.

假设 $A \in M_{m\times n}$.

定理

$Ax = 0$ 有非零解当且仅当 $R(A) < n$.

这里, $R(A)$ 可以理解成有效方程的个数. (齐次线性方程组)
$Ax = 0$ 有非零解当且仅当有效方程个数严格小于未知数个数.

定理

$Ax = b$ 有解当且仅当 $R(A) = R(A, b)$.

类似地,

定理

矩阵方程组 $AX = B$ 有解当且仅当 $R(A) = R(A, B)$.

证明参见课本.

定理 (矩阵秩的性质 7)

若 $AB=C$, 则 $R(C)\le \min\{R(A),R(B)\}$.

证明.

若 $AB=C$, 则方程 $AX=C$ 有解 $X=B$. 则 $R(A,C)=R(A)$. 又 $R(A,C)\ge R(C)$, 所以 $R(A)\ge R(C)$.
另一方面, $C^T=B^TA^T$. 所以由上面的证明知

$$R(B)=R(B^T)\ge R(C^T)=R(C).$$

$\square$